1 La logique

1.1 Assertions

Définition : Assertion

Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemple : Exemples d'assertions

— « Il pleut. »

— « Je suis plus grand que toi. »

— « $2 + 2 = 4$ »

— « $2 \times 3 = 7$ »

— « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$. »

1.2 Opérateurs logiques

1.2.1 L'opérateur logique « et »

Définition : Opérateur « et »

L'assertion « P et Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie. L'assertion « P et Q » est fausse sinon.

Propriété : Table de vérité de « P et Q »

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.2.2 L'opérateur logique « ou »

Définition : Opérateur « ou »

L'assertion « P ou Q » est vraie si l'une des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion « P ou Q » est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses.

Propriété : Table de vérité de « P ou Q »

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.2.3 La négation « non »

Définition : Opérateur « non »

L'assertion « non P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

Propriété : Table de vérité de « non P »

P	non P
V	F
F	V

1.2.4 L'implication $\Rightarrow$

Définition : Implication

L'assertion « (non P) ou Q » est notée « $P \Rightarrow Q$ ».

Propriété : Table de vérité de « $P \Rightarrow Q$ »

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple : Exemples d'implications

— « $0 \leq x \leq 25 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5$ » est vraie
— « $x \in]-\infty, -4[\Rightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$ » est vraie
— « $\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0$ » est fausse
— « $2 + 2 = 5 \Rightarrow \sqrt{2} = 2$ » est vraie

1.2.5 L'équivalence $\Leftrightarrow$

Définition : Équivalence

« $P \Leftrightarrow Q$ » est l'assertion « $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ ».

Propriété : Table de vérité de « $P \Leftrightarrow Q$ »

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple : Exemples d'équivalences

- Pour $x, x' \in \mathbb{R}$, l'équivalence « $x \cdot x' = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x' = 0)$ » est vraie.
- « $P \Leftrightarrow \text{non}(P)$ » est toujours fausse (quelque soit l'assertion P).

1.3 Propriétés des opérateurs logiques

Propriété : Propriétés des opérateurs logiques

Soient P, Q, R trois assertions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

1. $P \Leftrightarrow \text{non}(\text{non}(P))$
2. $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$
3. $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$
4. $\text{non}(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
5. $\text{non}(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$
6. $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
7. $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
8. « $P \Rightarrow Q$ » $\Leftrightarrow$ « $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ »

2 Quantificateurs

2.1 Le quantificateur $\forall$: « pour tout »

Définition : Quantificateur « pour tout »

L'assertion $\forall x \in E$ P(x) est vraie lorsque les assertions P(x) sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.

Exemple : Exemples de quantificateur « pour tout »

- « $\forall x \in [1, +\infty[\ (x^2 \geq 1)$ » est une assertion vraie.
- « $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geq 1)$ » est une assertion fausse.
- « $\forall n \in \mathbb{N}\ n(n+1)$ est divisible par 2 » est vraie.

2.2 Le quantificateur $\exists$: « il existe »

Définition : Quantificateur « il existe »

L'assertion $\exists x \in E$ P(x) est vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel P(x) est vraie.

Exemple : Exemples de quantificateur « il existe »

— « $\exists x \in \mathbb{R}\ (x(x-1)<0)$ » est vraie.
— « $\exists n \in \mathbb{N}\ n^2 - n > n$ » est vraie.
— « $\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 = -1)$ » est fausse.

2.3 La négation des quantificateurs

Propriété : Négation des quantificateurs

— La négation de « $\forall x \in E$ P(x) » est « $\exists x \in E$ non P(x) »
— La négation de « $\exists x \in E$ P(x) » est « $\forall x \in E$ non P(x) »

Exemple : Exemples de négation des quantificateurs

— La négation de « $\forall x \in [1,+\infty[\ (x^2 \geq 1)$ » est l'assertion « $\exists x \in [1,+\infty[\ (x^2 < 1)$ ».
— La négation de « $\forall x \in \mathbb{R}\ (x+1 \in \mathbb{Z})$ » est « $\exists x \in \mathbb{R}\ (x+1 \notin \mathbb{Z})$ ».

3 Raisonnements

3.1 Raisonnement direct

Définition : Raisonnement direct

Pour montrer que l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est vraie, on suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple : Exemple de raisonnement direct

Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a+b \in \mathbb{Q}$.
Démonstration : Prenons $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$. Alors $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$. Maintenant $a+b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq'+qp'}{qq'}$. Or le numérateur $pq'+qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}, q'' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a+b \in \mathbb{Q}$.

3.2 Cas par cas

Définition : Raisonnement par cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion P(x) pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A.

Exemple : Exemple de raisonnement par cas

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.
Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : $x \geq 1$.
Alors $|x-1| = x-1$.
Calculons alors $x^2 - x + 1 - |x-1|$.
$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - (x-1) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 0$.
Ainsi $x^2 - x + 1 - |x-1| \geq 0$ et donc $x^2 - x + 1 \geq |x-1|$.

Deuxième cas : $x < 1$.
Alors $|x-1| = -(x-1)$.
Nous obtenons $x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 + (x-1) = x^2 \geq 0$.
Et donc $x^2 - x + 1 \geq |x-1|$.

Conclusion :
Dans tous les cas $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

3.3 Contraposée

Définition : Raisonnement par contraposée

Le raisonnement par contraposée est basé sur l'équivalence suivante : L'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est équivalente à « $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ ».

Exemple : Exemple de raisonnement par contraposée

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.
Démonstration :
Nous supposons que n n'est pas pair.
Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair.
Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.
Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\ell + 1$ avec $\ell = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair.

Conclusion :
nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair.
Par contraposée ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

3.4 Absurde

Définition : Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer « $P \Rightarrow Q$ » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction.

Exemple : Exemple de raisonnement par l'absurde

Soient $a, b \geq 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.
Démonstration :
Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$.
Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ donc $a + a^2 = b + b^2$ d'où $a^2 - b^2 = b - a$.
Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$.
Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$ et donc en divisant par $a - b$ on obtient $a + b = -1$.
La somme de deux nombres positifs ne peut être négative.
Nous obtenons une contradiction.

Conclusion : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

3.5 Contre-exemple

Définition : Raisonnement par contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E$ P(x) » est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que P(x) soit fausse.

Exemple : Exemple de raisonnement par contre-exemple

Montrer que l'assertion suivante est fausse « Tout entier positif est somme de trois carrés ».
Démonstration : Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont 0, 1, 4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

3.6 Récurrence

Définition : Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion P(n), dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

1. Initialisation : on prouve P(0).
2. Hérédité : on suppose $n \geq 0$ donné avec P(n) vraie, et on démontre alors que l'assertion P(n + 1) au rang suivant est vraie.
3. Conclusion : on rappelle que par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : Exemple de raisonnement par récurrence

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.
Démonstration : Pour $n \geq 0$, notons P(n) l'assertion suivante : $2^n > n$. Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \geq 0$.
Initialisation. Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc P(0) est vraie.
Hérédité. Fixons $n \geq 0$. Supposons que P(n) soit vraie. Nous allons montrer que P(n + 1) est vraie. $2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n$ car par P(n) nous savons $2^n > n$, $> n + 1$ car $2^n \geq 1$. Donc P(n + 1) est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$.

4 Exercices

1. (Raisonnement direct) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.
2. (Cas par cas) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).
3. (Contraposée ou absurde) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (On utilisera que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)
4. (Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.
5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$?
6. (Récurrence) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
7. (Récurrence) Fixons un réel $x \geq 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.