1 Définitions de la continuité

Définition : Continuité en un point

Une fonction f est continue au point x_0 si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Définition : Continuité à droite et à gauche

- f est continue à droite du point x_0 si : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- f est continue à gauche du point x_0 si : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Propriété : Continuité en un point

f est continue au point x_0 équivaut à f continue à droite et à gauche de x_0.

2 Continuité sur un intervalle

Définition : Continuité sur un intervalle

- f est continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$ si f est continue en tout point $x \in]a, b[$.
- f est continue sur $[a, b]$ si f est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a et à gauche en b.
- f est continue sur $[a, b[$ si f est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a.
- f est continue sur $]a, b]$ si f est continue sur $]a, b[$ et continue à gauche en b.

3 Opérations sur les fonctions continues

Propriété : Opérations préservant la continuité

Si f et g sont continues sur I, alors les fonctions suivantes sont continues sur I :

- $f + g$
- $f - g$
- $f \times g$
- λf, où λ est une constante
- $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ (pour $x \in I$ tel que $g(x) \neq 0$)

4 Continuité des fonctions usuelles

Propriété : Fonctions usuelles continues

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.
- Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\tan x$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- La fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty$.

5 Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriété : Image d'un intervalle

- L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est un segment $[m, M]$ (m la valeur minimale de f sur $[a, b]$ et M la valeur maximale de f sur $[a, b]$).
- L'image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle J. On note $J = f(I)$.

Exemple : Image d'un intervalle

Si la fonction est continue et strictement croissante		
$\mathrm{f}([a,b]) = [\mathrm{f}(a), \mathrm{f}(b)]$	$\mathrm{f}([a,b[) = [\mathrm{f}(a), \lim\limits_{x\to b^-} \mathrm{f}(x)[$	$\mathrm{f}(]a,b]) =]\lim\limits_{x\to a^+} \mathrm{f}(x), \mathrm{f}(b)]$
$\mathrm{f}(]a,b[) =]\lim\limits_{x\to a^+} \mathrm{f}(x), \lim\limits_{x\to b^-} \mathrm{f}(x)[$	$\mathrm{f}([a,+\infty[) = [\mathrm{f}(a), \lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{f}(x)[$	$\mathrm{f}(]a,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to a^+} \mathrm{f}(x), \lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{f}(x)[$
$\mathrm{f}(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{f}(x), \lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{f}(x)[$	$\mathrm{f}(]-\infty,a]) =]\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{f}(x), \mathrm{f}(a)]$	$\mathrm{f}(]-\infty,a[) =]\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{f}(x), \lim\limits_{x\to a^-} \mathrm{f}(x)[$
Si la fonction est continue et strictement décroissante		
$\mathrm{f}([a,b]) = [\mathrm{f}(b), \mathrm{f}(a)]$	$\mathrm{f}([a,b[) = [\lim\limits_{x\to b^-} \mathrm{f}(x), \mathrm{f}(a)[$	$\mathrm{f}(]a,b]) =]\mathrm{f}(b), \lim\limits_{x\to a^+} \mathrm{f}(x)]$
$\mathrm{f}(]a,b[) =]\lim\limits_{x\to b^-} \mathrm{f}(x), \lim\limits_{x\to a^+} \mathrm{f}(x)[$	$\mathrm{f}([a,+\infty[) = [\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{f}(x), \mathrm{f}(a)[$	$\mathrm{f}(]a,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{f}(x), \lim\limits_{x\to a^+} \mathrm{f}(x)[$
$\mathrm{f}(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{f}(x), \lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{f}(x)[$	$\mathrm{f}(]-\infty,a]) = [\mathrm{f}(a), \lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{f}(x))]$	$\mathrm{f}(]-\infty,a[) =]\lim\limits_{x\to a^-} \mathrm{f}(x), \lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{f}(x)[$

6 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Propriété : Théorème des valeurs intermédiaires (cas particulier)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.
Formellement : $\forall k \in [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))], \exists c \in [a, b] : f(c) = k$

Propriété : Théorème des valeurs intermédiaires (cas général)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soient a et b deux points quelconques de I.
Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un point c entre a et b tel que $f(c) = k$.

Corollaires

1. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, c'est-à-dire si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe au moins un point c entre a et b tel que $f(c) = 0$.
2. Plus généralement, si f est continue sur un intervalle contenant a et b, et si $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution c dans l'intervalle ouvert délimité par a et b.

Remarques importantes

1. **Unicité de la solution :** Si f est à la fois continue et strictement monotone sur l'intervalle contenant a et b, alors le point c satisfaisant $f(c) = k$ est **unique**.
2. **Conditions pour l'existence :**
   — Pour démontrer l'existence d'au moins une solution (c'est-à-dire, $\exists c$ entre a et b : $f(c) = k$), il est nécessaire et suffisant que f soit continue sur l'intervalle contenant a et b.
   — Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution (c'est-à-dire, $\exists! c$ entre a et b : $f(c) = k$), il faut que f soit continue et strictement monotone sur l'intervalle contenant a et b.

7 Fonction réciproque

Définition : Fonction réciproque

Si $f : I \to J$ est bijective, alors sa fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est définie par :

$$\forall y \in J : f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{et} \quad \forall x \in I : f^{-1}(f(x)) = x$$

Propriété : Propriétés de la fonction réciproque

— Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
— f^{-1} et f varient dans le même sens.
— Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f^{-1} est continue sur $J = f(I)$.

8 Fonction racine n-ième et puissances rationnelles

8.1 Fonction racine n-ième

Définition : Fonction racine n-ième

La fonction racine n-ième est définie par :

$$f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, \quad x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

où n est un entier naturel non nul.

Propriété : Propriétés de la racine n-ième

— $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
— $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$
— $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ (pour $b > 0$)

8.2 Puissances rationnelles

Définition : Puissance rationnelle

Pour tout nombre réel strictement positif a et pour tout nombre rationnel $r = \frac{p}{q}$ (où p et q sont des entiers et $q \neq 0$), on définit :

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}$$

Propriété : Propriétés des puissances rationnelles

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, et pour tous nombres rationnels r et s :
— $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
— $(a^r)^s = a^{rs}$
— $(ab)^r = a^r \cdot b^r$
— $\frac{a^r}{b^r} = (\frac{a}{b})^r$